3.8 Inverse Trig Functions: Differentiation

1. $f(x) = 3\cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = -3 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$$

2. $y = \tan^{-1}\sqrt{t}$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{t})^2} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$$

3. $x(t) = t\arctan 2t$

$$x'(t) = \arctan 2t\,(1) + t\left(\frac{1}{1+(2t)^2} \cdot 2\right)$$

$$= \arctan 2t + \frac{2t}{1+4t^2}$$

4. $y = 25\sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - x\sqrt{25-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 25\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} \cdot \frac{1}{5}\right) - \left[(25-x^2)^{\frac{1}{2}}(1) + x\left(\frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2\right.\right.$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}} - (25-x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{25-x^2}{25}}} - (25-x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{25-x^2}} - (25-x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 25(25-x^2)^{-\frac{1}{2}} - (25-x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (25-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[25 - (25-x^2) + x^2\right]$$

$$= (25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(25 - 25 + x^2 + x^2)$$

$$= (25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x^2)$$

OR $\frac{2x^2}{\sqrt{25-x^2}}$