Evaluate Limits Analytically

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{ax} = 1$

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{ax} = 0$

ex: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5}{5}\cdot\frac{\sin 5x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x}$$

$$= 5\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$$

$$= 5\cdot 1$$

$$= \boxed{5}$$

ex: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{3}{3}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 1$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$

ex. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{x}$$

$$= 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= 2\cdot 0$$

$$= \boxed{0}$$

ex. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1-\cos x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{1-\cos x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1-\cos x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= 1 + 0$$

$$= \boxed{1}$$

ex: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}$$

$$= \lim \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= 1\cdot 0$$

$$= \boxed{0}$$